УДК 536.46

НАХОЖДЕНИЕ УСЛОВИЙ ДИФФУЗИОННО-ТЕПЛОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАМЕНИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МОДЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ СКОРОСТИ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

К.О. Сабденов

Томский политехнический университет.
E-mail: sabdenov@k21.phtd.tpu.ru

Решается задача о диффузионно-тепловой неустойчивости ламинарного пламени с ненулевой толщиной зоны химической реакции на основе модельной функции источника. Предположение переменности скорости пламени приводит к формуле Маркштейна, связывающей скорость движения фронта горения с кривизной этого фронта и практически к абсолютной неустойчивости горения. При постоянной же скорости пламени и числе Льюиса Le > 1, реализуется только апериодическая потеря устойчивости, а при Le < 1 – только периодическая. Если энергия активации в единицах произведения газовой постоянной на температуру пламени выше 6, то абсолютная устойчивость по отношению к возмущениям с любыми длинами волн возможна только в малой окрестности Le = 1 и Le = 0.

В наиболее общей постановке задачи на исследование диффузионно-тепловой неустойчивости рассматривается поведение горения по отношению к произвольным возмущениям, приводящим к пространственному искривлению плоского ламинарного пламени, движущегося относительно исходной горючей смеси со скоростью v_n, которую называют нормальной скоростью распространения. Исследованию неустойчивости ламинарного пламени посвящено большое число работ [1–6 и др.]. Первое математическое исследование т.н. одномерной устойчивости проведено Д. Розеном [1], Г.И. Баренблаттом, Я.Б. Зельдовичем, Я.И. Канелем [2, 3]. Более поздние [5, 7 и др.] исследования показали, что область устойчивого горения определяется не только величиной числа Льюиса, но и параметром $\psi=E(T_b-T_0)/2RT_b^2>>1$, характеризующим скорость химической реакции. При достаточно больших значениях данного параметра область устойчивого горения локализуется в малой окрестности вблизи прямой Le = 1 на плоскости (Le, ψ), являющейся единственным условием устойчивости в пределе $\psi\to\infty$ [7, 8]. Во всех вышеуказанных работах скорость химической реакции моделируется δ-функцией, что приводит к несовпадениям результатов различных авторов [4, 7]. Поэтому представляет интерес исследование с модельными функциями скорости реакции, более близкими к закону Аррениуса.

1. Плоский фронт пламени. В простом случае брутто-реакции первого порядка скорость W протекания химической реакции описывается формулой

$$W = Nk_0 \exp(-\frac{E}{RT}). \qquad (1)$$

Аналитическое исследование задач нестационарного горения с применением (1) является очень трудоемкой работой. Поэтому вместо этого выражения примем более упрощенную форму

$$W = Nk_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_b}\right)\eta(T-T_*) \qquad (2)$$

с температурой T_* воспламенения, вид которой определяется из требования совпадения скорости плоского пламени с аналогичным выражением из теории Зельдовича-Франк-Каменецкого при больших энергиях активации. Скорость реакции (2) сохраняет важнейшие свойства закона Аррениуса – его сильную зависимость от температуры и нелинейность. Формула (2) была успешно применена в работе [9] при аналитическом расчете скорости движения плоского стационарного фронта пламени при произвольных числах Льюиса.

С использованием (2) плоский стационарный фронт пламени в газовой смеси описывается системой уравнений

$$v_n\frac{dT}{dx'} = \kappa\frac{d^2T}{dx'^2} + \frac{Q}{c_p}Nk_0\exp\left(-\frac{E}{RT_b}\right)\eta(T-T_*),$$
$$v_n\frac{dN}{dx'} = D\frac{d^2N}{dx'^2} - Nk_0\exp\left(-\frac{E}{RT_b}\right)\eta(T-T_*). \qquad (3)$$

С введением безразмерных параметров и масштаба v_* скорости

$$u = \frac{T-T_0}{T_b-T_0} = \frac{c_p}{QN_0}(T-T_0), \quad b = \frac{N_0-N}{N_0},$$
$$x = \frac{x'\ v_*}{\kappa}, \quad w = \frac{v_n}{v_*}, \quad T_b = T_0 + \frac{Q}{c_p}N_0,$$

система (3) принимает вид

$$w^0\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} + W, \quad w^0\frac{db}{dx} = \mathrm{Le}\frac{d^2b}{dx^2} + W,$$
$$W = a(1-b)\eta(u-u_*), \quad a = \frac{k_0\kappa}{v_*^2}\exp\left(-\frac{E}{RT_b}\right), \qquad (4)$$

где w^0 – безразмерная скорость плоского стационарного пламени. В дальнейшем верхний индекс 0 будет означать принадлежность символа к такому пламени.

Задаче о распространении пламени по уравнениям (4) соответствуют граничные условия

$$x\to-\infty: u^0 = b^0 = 0; x\to+\infty: du^0/dx = db^0/dx = 0. \qquad (5)$$

Помещая место разрыва (2) в точку $x = 0$ и присваивая индексы 1 и 2 температуре u^0 и выгоранию b^0 соответственно при $x < 0$ и $x > 0$, приведем распределения $u^0(x)$, $b^0(x)$:

$$x<0:\ u_1^0=u_*\exp(w^0x)=\frac{k}{k+w^0}\exp(w^0x),$$
$$b_1^0=\left(1-\frac{w^0k}{a}\right)\exp(w^0x/\mathrm{Le})=\frac{k^2\mathrm{Le}}{a}\exp(w^0x/\mathrm{Le}),$$
$$x>0:\ u_2^0=1-\frac{w^0}{k+w^0}\exp(-kx),\ b_2^0=1-\frac{w^0k}{a}\exp(-kx),$$
$$k=\frac{\sqrt{(w^0)^2+4a\mathrm{Le}}-w^0}{2\mathrm{Le}},\ a=\frac{k_0\kappa}{v_*^2}\exp\left(-\frac{E}{RT_b}\right),\qquad(6)$$
$$(w^0)^2=\left(\frac{1-u_*}{u_*}\right)^2\frac{a}{\mathrm{Le}+(1-u_*)/u_*},$$

где k является положительным корнем уравнения $\mathrm{Le}k^2+w^0k-a=0$.

Решения (6) удовлетворяют граничным условиям (5) и условиям непрерывности $u^0(x)$, $b^0(x)$ и их первых производных в точке $x=0$.

Предел $a\to\infty$ соответствует бесконечно большой энергии активации. Тогда $u_*\to1$, и если принять

$$\frac{1-u_*}{u_*}\approx1-u_*=\frac{T_b}{T_b-T_0}\sqrt{\frac{2T_0}{T_b}}\frac{RT_b}{E},$$

то получим выражение для скорости пламени v_n, приведенное в [8]. За масштаб скорости v_* удобно взять v_n. Тогда

$$w^0=1,\ a=\mathrm{Le}n\left(\frac{n-1}{n}\frac{E}{RT_b}\right)^2,\quad n=\frac{T_b}{T_0}.$$

С учетом сказанного в дальнейшем будем полагать $w^0=1$.

С принятым видом температуры воспламенения u_* в пределе $E/RT_b\to\infty$, скорость химической реакции в форме (2) стремиться, как и закон Аррениуса, к δ-функции Дирака.

2. Математическая формулировка задачи для слабо искривленного пламени. Наложим теперь на плоское стационарное пламя малое возмущение, вызывающее такую же по величине деформацию его фронта по поперечным координатам y, z. Для линейного по степеням возмущений анализа достаточно рассматривать систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+w\frac{\partial u}{\partial x}=\Delta u+W,\ \frac{\partial b}{\partial t}+w\frac{\partial b}{\partial x}=\mathrm{Le}\Delta b+W,$$
$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad(7)$$

где пренебрегается конвективными переносами по направлениям y, z, как малыми величинами высших порядков. Безразмерное время t измеряется в единицах κ/u_n^2. Решения уравнений (7) будем искать в виде

$$u=u^0(x)+\xi(y,z,t)F(x),\quad b=b^0(x)+\xi(y,z,t)G(x),$$
$$w=w^0+w'=w^0-q\Delta'\xi,\quad w'=-q\Delta'\xi,$$

где в укороченном операторе Δ' отсутствует дифференцирование по x. Деформация $\xi(y,z,t)$ фронта горения имеет экспоненциальную зависимость от времени с инкрементом Ω нарастания возмущений (или показателем роста возмущений) и синусоидальную зависимость от пространственных координат с волновыми числами λ_1, λ_2 по направлениям y и z:

$$\partial\xi/\partial t=\Omega\xi,\quad \Delta'\xi=-\lambda^2\xi;\quad \lambda^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2.$$

Параметр q в стационарном режиме горения является постоянной Маркштейна.

Подстановка u, b, w в (7) дальнейшая линеаризация и использование (2) в промежуточных выкладках после несложных преобразований приводят к уравнениям для F, G

$$\frac{d^2F}{dx^2}-\frac{dF}{dx}-(\Omega+\lambda^2)F+\frac{\partial W}{\partial u^0}F=-\frac{\partial W}{\partial b^0}G+q\lambda^2\frac{du^0}{dx},$$
$$\mathrm{Le}\frac{d^2G}{dx^2}-\frac{dG}{dx}-(\Omega+\lambda^2\mathrm{Le})G+\frac{\partial W}{\partial b^0}G=-\frac{\partial W}{\partial u^0}F+q\lambda^2\frac{db^0}{dx}.\qquad(8)$$

Вычислив входящие в (8) производные

$$\frac{\partial W}{\partial u^0}=a(1-b^0)\delta(u^0-u_*),\quad \frac{\partial W}{\partial b^0}=-a\eta(u^0-u_*),$$

далее имеем

$$\frac{d^2F}{dx^2}-\frac{dF}{dx}-(\Omega+\lambda^2)F+a(1-b^0)\delta(u^0-u_*)F=$$
$$=a\eta(u^0-u_*)G+q\lambda^2\frac{du^0}{dx},$$
$$\mathrm{Le}\frac{d^2G}{dx^2}-\frac{dG}{dx}-(\Omega+\lambda^2\mathrm{Le})G-a\eta(u^0-u_*)G=\qquad(9)$$
$$=-a(1-b^0)\delta(u^0-u_*)F+q\lambda^2\frac{db^0}{dx}.$$

Граничные условия (5) справедливы и для возмущенного пламени, только в (5) необходимо произвести замену $u^0\to u$, $b^0\to b$. Из полученных таким образом условий для системы (9) следует обращение в ноль F и G при $x\to-\infty$ и их первых производных при $x\to+\infty$. В точке $x=\xi$ и в рамках используемого здесь линейного анализа должны быть непрерывными значения u, b, du/dx, db/dx. Условие непрерывности u и b дает равенства

$$F_1=F_2,\ G_1=G_2.\qquad(10)$$

Условие непрерывности их производных (точнее, потоков энергии и вещества) приводит к требованиям:

$$\frac{d^2u_1^0}{dx^2}+\frac{dF_1}{dx}=\frac{d^2u_2^0}{dx^2}+\frac{dF_2}{dx},\ \frac{d^2b_1^0}{dx^2}+\frac{dG_1}{dx}=\frac{d^2b_2^0}{dx^2}+\frac{dG_2}{dx}.\ (11)$$

Вторые производные от $u^0(x)$, $b^0(x)$ имеют разрыв в точке $x=0$:

$$\frac{d^2u_1^0}{dx^2}-\frac{d^2u_2^0}{dx^2}=k,\quad \frac{d^2b_1^0}{dx^2}-\frac{d^2b_2^0}{dx^2}=\frac{k}{\mathrm{Le}},$$

и тогда условия (11) в окончательном виде принимают форму

$$\frac{dF_1}{dx}-\frac{dF_2}{dx}+k=0,\quad \frac{dG_1}{dx}-\frac{dG_2}{dx}+\frac{k}{\mathrm{Le}}=0.\qquad(12)$$

Интегрируя (9) по исчезающей малой области вблизи $x=0$ и используя известные [10] свойства δ-функции, находим

$$\frac{dF_2}{dx}-\frac{dF_1}{dx}+(k+1)F_2=0,\quad \frac{dG_2}{dx}-\frac{dG_1}{dx}+\frac{k+1}{Le}F_2=0.\ (13)$$

Учитывая (10), легко видеть, что (12) и (13) совместно приводят к равенствам

$$F_2=-\frac{k}{k+1}=F_1.\qquad(14)$$

Это означает, что одно из равенств (14) можно взять в качестве дополнительного к (10) и (12) граничного условия. Таким образом, при x=0 имеем пять граничных условий на нахождение неизвестных четырех постоянных интегрирования (после выполнении условий при $x \to \pm\infty$) и собственных чисел q и Ω.

3. Характеристическое уравнение. Приступим теперь к решению уравнений (9). Для области x<0 из (9) с учетом (6) получаем систему уравнений

$$\frac{d^2F_1}{dx^2} - \frac{dF_1}{dx} - (\Omega + \lambda^2)F_1 = q\lambda^2 \frac{k}{k+1}\exp(x),$$

$$\mathrm{Le}\frac{d^2G_1}{dx^2} - \frac{dG_1}{dx} - (\Omega + \lambda^2\mathrm{Le})G_1 = q\lambda^2 \frac{k^2}{a}\exp(\frac{x}{\mathrm{Le}}).$$

Ее решения, обращающиеся в ноль при $x \to -\infty$, следующие:

$$F_1 = f_1\exp(\alpha x) - q\frac{\lambda^2}{\Omega + \lambda^2}\frac{k}{k+1}\exp(x),$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{1+4(\Omega+\lambda^2)}}{2},$$

$$G_1 = g_1\exp(\beta x) - q\frac{\lambda^2}{\Omega + \mathrm{Le}\lambda^2}\frac{k^2}{a}\exp(x/\mathrm{Le}), \tag{15}$$

$$\beta = \frac{1+\sqrt{1+4\mathrm{Le}(\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2)}}{2\mathrm{Le}}.$$

Аналогично в области x>0 соответственно имеем

$$\frac{d^2F_2}{dx^2} - \frac{dF_2}{dx} - (\Omega + \lambda^2)F_2 = aG_2 + q\lambda^2 \frac{k}{k+1}\exp(-kx),$$

$$\mathrm{Le}\frac{d^2G_2}{dx^2} - \frac{dG_2}{dx} - (\Omega + \mathrm{Le}\lambda^2)G_2 - aG_2 = q\lambda^2 \frac{k^2}{a}\exp(-kx),$$

$$G_2 = g_2\exp(-\chi x) - q\frac{\lambda^2}{\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2}\frac{k^2}{a}\exp(-kx),$$

$$\chi = \frac{-1+\sqrt{1+4\mathrm{Le}(a+\Omega+\lambda^2\mathrm{Le})}}{2\mathrm{Le}},$$

$$F_2 = f_2\exp(-\gamma x) + A_1g_2\exp(-\chi x) - q\frac{\lambda^2}{\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2}A_2\exp(-kx),$$

$$\gamma = \frac{-1+\sqrt{1+4(\Omega+\lambda^2)}}{2},\quad A_1 = \frac{a}{\chi^2+\chi-(\Omega+\lambda^2)}, \tag{16}$$

$$A_2 = \frac{k}{k+1}\frac{k(k+1)-(\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2)}{k(k+1)-(\Omega+\lambda^2)}.$$

В (15) и (16) f_1, f_2, g_1, g_2 – постоянные интегрирования.

Подстановка (15) и (16) в граничные условия (10) приводит к алгебраическим уравнениям

$$f_1 - q\frac{\lambda^2}{\Omega+\lambda^2}\frac{k}{k+1} = f_2 + g_2A_1 - q\frac{\lambda^2}{\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2}A_2,\quad g_1 = g_2. \tag{17}$$

Использование (15), (16) в (12) дают уравнения

$$\alpha f_1 - q\frac{\lambda^2}{\Omega+\lambda^2}\frac{k}{k+1} + \gamma f_2 + \chi g_1A_1 - q\frac{\lambda^2}{\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2}kA_2 + k = 0,$$

$$\beta g_1 - q\frac{\lambda^2}{\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2}\frac{k^2}{a\mathrm{Le}} + \chi g_2 - q\frac{\lambda^2}{\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2}\frac{k^3}{a} + \frac{k}{\mathrm{Le}} = \tag{18}$$

$$= (\beta+\chi)g_1 - \left(q\frac{\lambda^2}{\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2} - 1\right)\frac{k}{\mathrm{Le}},$$

где при записи второго выражения использовано второе равенство из (17) и известное выше $\mathrm{Le}k^2+k-a=0$.

Из второго выражения в (18) находим

$$g_1 = \frac{k}{\mathrm{Le}(\chi+\beta)}\left(q\frac{\lambda^2}{\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2} - 1\right). \tag{19}$$

Из условий (14) определяем f_1, f_2:

$$f_1 = \frac{k}{k+1}\left(q\frac{\lambda^2}{\Omega+\lambda^2} - 1\right),\ f_2 = q\frac{\lambda^2}{\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2} - A_1g_1 - \frac{k}{k+1}. \tag{20}$$

Из первых в (17), (18) и (19), (20) после несложного расчета получим уравнение

$$\frac{k}{k+1}\left[q\gamma\frac{\lambda^2}{\Omega+\lambda^2} - \alpha - \gamma\right] +$$

$$+\phi_1\left(q\frac{\lambda^2}{\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2} - 1\right) - \phi_2 q\frac{\lambda^2}{\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2} + k = 0,$$

$$\phi_1 = \frac{k}{\mathrm{Le}}\frac{\chi-\gamma}{\chi+\beta}\frac{k(\mathrm{Le}k+1)}{\chi^2+\chi-(\Omega+\lambda^2)}, \tag{21}$$

$$\phi_2 = \frac{k(k-\gamma)}{k+1}\frac{k(k+1)-(\Omega+\mathrm{Le}\lambda^2)}{k(k+1)-(\Omega+\lambda^2)}.$$

Из условия выполнения требуемого равенства в (21) необходимо найти явный вид q и Ω. Параметр q определяет изменение скорости распространения пламени при наличии возмущения на первоначально плоском фронте. Для нахождения нового значения скорости пламени необходимо разрешить уравнение (21) при всевозможных значениях q и Ω, считая q таким же корнем (21), как и Ω. При этом в качестве решения задачи (1) получаем набор пар q, Ω. Поясним на частном примере, как выполняется процедура нахождения данных собственных значений. Пусть для простоты Le=1. Тогда

$$\phi_1 = \frac{\chi-\gamma}{\chi+\beta}\frac{k^2(k+1)}{\chi^2+\chi-(\Omega+\lambda^2)} = k\frac{\chi-\gamma}{\chi+\beta},\quad \phi_2 = \frac{k(k-\gamma)}{k+1},$$

и вместо (21) имеем

$$k\left(q\frac{\lambda^2}{\Omega+\lambda^2} - 1\right)\left(\frac{\chi-\gamma}{\chi+\beta} - \frac{k-2\gamma}{k+1}\right) = 0. \tag{22}$$

Равенство в (22) выполняется при

$$q = \frac{\Omega}{\lambda^2} + 1, \tag{23}$$

и таких значений Ω, которые являются корнями уравнения

$$\frac{\chi-\gamma}{\chi+\beta} - \frac{k-2\gamma}{k+1} = 0.$$

Решая это уравнение, находим $\Omega_1=-\lambda^2$, $\Omega_2=-\lambda^2-1/4$. Подставив их в (23), получим $q(\Omega_1)=0$, $q(\Omega_2)=-1/(4\lambda^2)$.

С учетом формулы (23) определение скорости пламени $w=w^0-q\Delta'\xi$ теперь принимает форму

$$w = w^0 - \left(\frac{\Omega}{\lambda^2}+1\right)\Delta'\xi.$$

Заменим здесь Ω и λ^2 на их выражения через производные от деформации фронта согласно равенствам

$$\Omega = \frac{1}{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t},\ \lambda^2 = -\frac{1}{\xi}\Delta'\xi : w = w^0 + \frac{\partial\xi}{\partial t} - \Delta'\xi.$$

Первый член w^0=1 – это скорость плоского невозмущенного пламени, второй – кинематическая

добавка, появление которой обусловлено тем, что задача решается относительно системы координат, связанной с плоским невозмущенным пламенем, третий определяет изменение скорости пламени от кривизны его фронта.

Вопрос о диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени можно сформулировать двумя разными способами. В первом из них скорость v_n распространения пламени можно считать не меняющейся при наличии возмущений. Тогда при q=0 устойчивость определяется отсутствием в корнях (21) инкремента Ω с положительной действительной частью. Такой способ применен в работах [4, 5, 7]. Второй же подход, использованный выше, опирается на предположении непостоянства скорости пламени ($q\neq 0$) в возмущенном пламени. Какой из них адекватно описывает реальное пламя, предстоит еще выяснить. Но ясно, что в первом способе накладывается ограничение на спектр возможных значений Ω.

4. Устойчивость горения при постоянной скорости пламени. Анализ устойчивости пламени при v_n=const(q=0) изучен достаточно подробно [8]. Поэтому данный вопрос здесь разбирается только поверхностно. Считая число Льюиса произвольным, рассмотрим (21) в пределе $k\to\infty$. Полученное таким образом уравнение

$$q=\left(\frac{\Omega}{\lambda^2}+\mathrm{Le}\right)\frac{1/\mathrm{Le}-\beta+\gamma}{1/\mathrm{Le}-\beta+\gamma+\lambda^2(\mathrm{Le}-1)/\alpha}$$

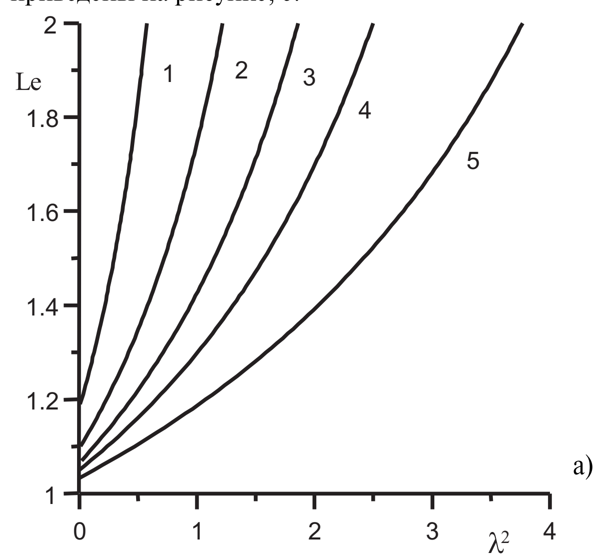
при q=0 распадается на два других: $\Omega/\lambda^2+\mathrm{Le}=0$; $1/\mathrm{Le}-\beta+\gamma=0$, откуда находим $\Omega_1=-\mathrm{Le}\lambda^2$, $\Omega_2=\lambda$. Второй, положительный, корень указывает на абсолютную неустойчивость пламени в случае бесконечно большой энергии активации. Этот результат получен ранее в работе [7], но следует также и из дисперсионного соотношения [4].

При q=0 из (21) получим

$$\frac{k-2\gamma}{k+1}-\frac{\chi-\gamma}{\chi+\beta}\frac{k(\mathrm{Le}k+1)}{\mathrm{Le}\left[\chi^2+\chi-(\Omega+\lambda^2)\right]}=0. \qquad (25)$$

Следует заметить, что это характеристическое уравнение при k>>1 не переходит в аналогичные выражения, полученные в [4, 7].

В работе [5] было выявлено, что при числе Le>1 существуют области с колебательной и неколебательной потерей устойчивости. Граница области для первого случая находится из условия Ω=0, для второго – из условия $\Omega=i\omega$, i=–1. Параметр ω имеет смысл частоты. Если же Le<1, то наблюдается только колебательная потеря устойчивости. Но исследование устойчивости, проведенное на основе формулы (25), показало несколько другую картину. Так, при Le>1 наблюдается только неколебательная (апериодическая) потеря устойчивости. Результаты численного анализа (25) приведены на рисунке, *а*. Здесь области неустойчивого горения, занимающие пространство выше кривых 1, 2 и т.д. при различных значениях безразмерной энергии активации k имеют форму полуостровов с общим берегом – ординатой Le. Если же Le<1, то потеря устойчивости носит только колебательный характер. Причем область неустойчивого горения имеет форму острова, размеры которого быстро растут с увеличением k. Результаты численного расчета приведены на рисунке, *б*.



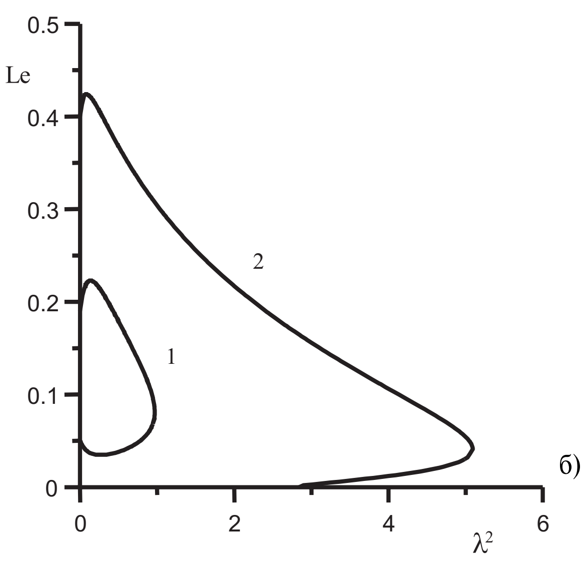


Рисунок. *Изменение области апериодической (а) потери устойчивости (Le>1) с ростом безразмерной энергии активации k: 5 (1), 10 (2), 15 (3), 20 (4), 30 (5); периодической (б) потери устойчивости (Le<1) с ростом безразмерной энергии активации k: 5 (1), 7 (2). При k=5 остров неустойчивости образован кривой 1 и частью оси Le, а при k=7, 10, 15 еще и частью оси λ²*

5. Устойчивость горения при переменной скорости пламени. Найденные выше для случая Le=1 показатели $\Omega_1=-\lambda^2$, $\Omega_2=-\lambda^2-1/4$ роста возмущений с отрицательно определенными знаками, казалось бы, свидетельствуют об абсолютной устойчивости пламени с переменной v_n. Тем не менее, оказывается, что кроме Ω^1 и Ω^2 существует еще один режим горения с инкрементом Ω_3, который выпадает из внимания, если в (21) сразу полагать Le=1. Действительно, пусть в уравнении (21)

$$q = \frac{\Omega}{\lambda^2} + \mathrm{Le}.$$

В получающемся из (21) равенстве

$$\gamma \frac{\Omega + \mathrm{Le}\lambda^2}{\Omega + \lambda^2} - \alpha - \gamma - (k - \gamma) \times \\ \times \frac{k(k+1) - (\Omega + \mathrm{Le}\lambda^2)}{k(k+1) - (\Omega + \lambda^2)} + k + 1 = 0 \qquad (26)$$

примем $\Omega \equiv \Omega_3 = -\lambda^2 + k(k+1)$. Раскрывая возникающую при этом неопределенность вида 0/0 в дроби

$$\frac{k - \gamma}{k(k+1) - (\Omega_3 + \lambda^2)},$$

приведем (26) к виду

$$\lambda^2 \frac{k(\mathrm{Le} - 1)}{(k+1)(2k+1)} = 0. \qquad (27)$$

Требуемое здесь равенство нулю левой части (27) возможно только при Le=1, если не принимать во внимание экзотический случай $\lambda=0$, соответствующий одномерным возмущениям и нереальный случай $k=\infty$.

При инкременте Ω_3 в решениях F_1 и F_2 тоже возникает неопределенность вида 0/0, которая легко раскрывается. Громоздкий, но простой расчет дает случай Le=1:

$$x < 0, \;\; F_1 = G_1 = -\frac{k}{k+1} \exp x;$$

$$x > 0, \;\; F_2 = G_2 = -\frac{k}{k+1} \exp(-kx).$$

Таким образом, для волновых чисел λ, удовлетворяющих неравенству

$$\lambda < \sqrt{k(k+1)} \approx k = \frac{n-1}{\sqrt{n}} \frac{E}{RT_b},$$

пламя неустойчиво.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rosen J.B. On the instability of flame // J. Chem. Phys. – 1954. – V. 22. – №. 4. – P. 733–742.
2. Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б. К одномерной теории диффузионно-тепловой устойчивости пламени // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 21. – № 6. – С. 856–859.
3. Канель Я.И. // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 136. – № 2. – С. 277–280.
4. Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б., Истратов А.Г. К теории теплодиффузионной неустойчивости ламинарного пламени// Прикладная механика и техническая физика. – 1962. – № 4. – С. 21–26.
5. Гришин А.М., Зеленский Е.Е. Релаксационные колебания при горении газовых и пористых реагирующих систем // Четвертая научная конф. по математике и механике: Материалы. – Томск: Изд-во ТГУ, 1974. – Ч. 2. – С. 674–675.
6. Lewis B., von Elbe G. Combustion, flames and explosions of gases. – N.Y., 1938.
7. Алдушин А.П., Каспарян С.Г. Устойчивость ламинарного пламени с модельной функцией скорости химической реакции // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 244. – № 1. – С. 67–70.
8. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. – М.: Наука, 1980.
9. Вилюнов В.Н., Дик И.Г., Зурер А.В., Ищенко А.Н. Зависимость скорости распространения теплодиффузионного пламени для широкого диапазона чисел Le // Физика горения и взрыва. – 1984. – Т. 20. – № 5. – С. 35–42.
10. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974.

УДК 537.533